Construction de Hajós pour les graphes orientés

Thomas Bellitto

Jeudi 14 novembre 2019

University of Southern Denmark,

joint work with
Jørgen Bang-Jensen, University of Southern Denmark,
Thomas Schweser, Technische Universität Ilmenau,
Michael Stiebitz, Technische Universität Ilmenau

Graphe critique

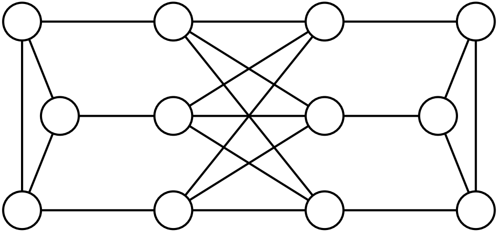
Graphe k-critique

Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.

Graphe critique

Graphe k-critique

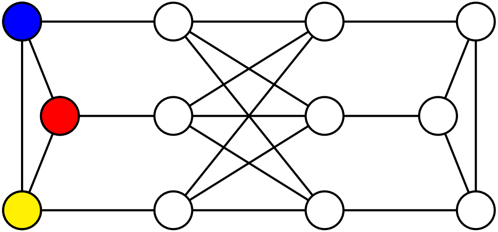
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

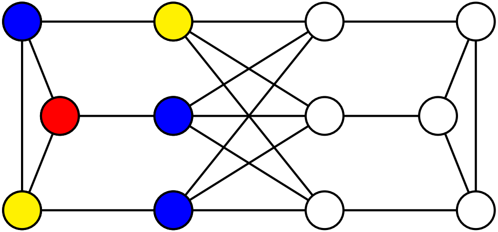
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

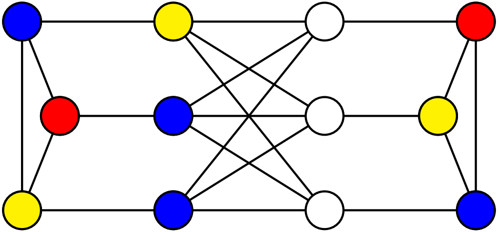
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

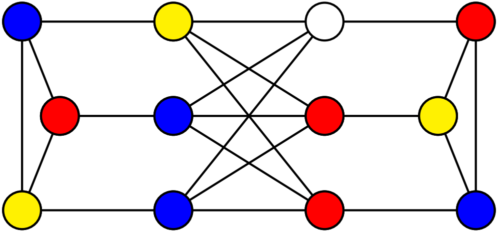
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

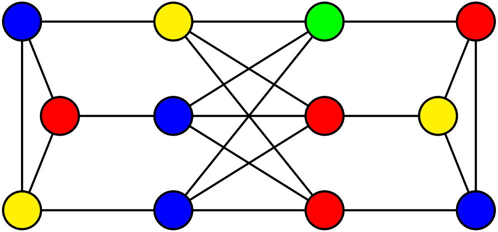
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

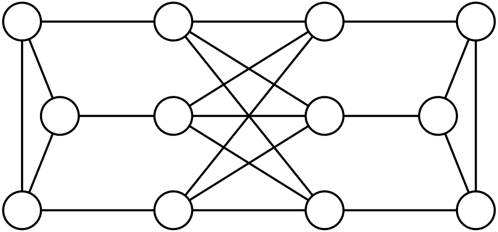
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

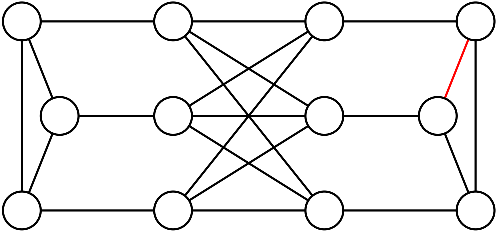
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

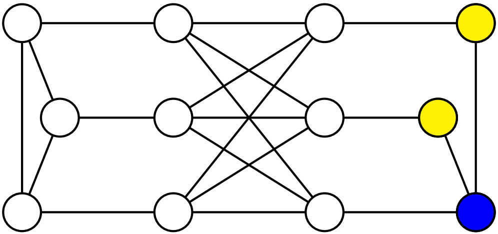
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

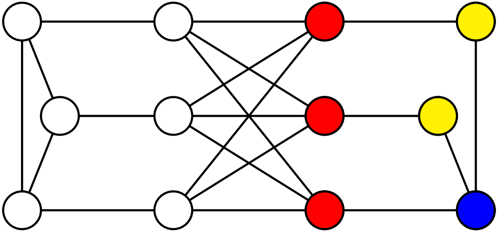
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

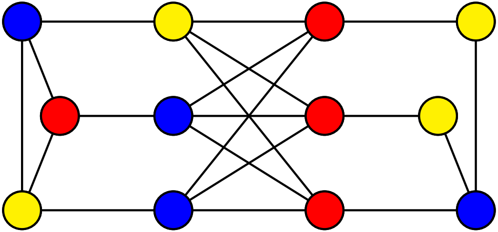
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

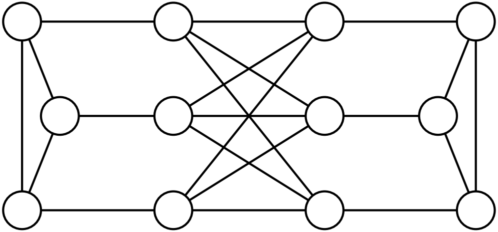
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

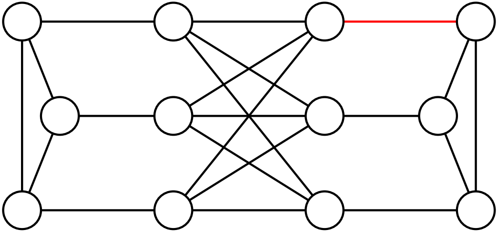
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

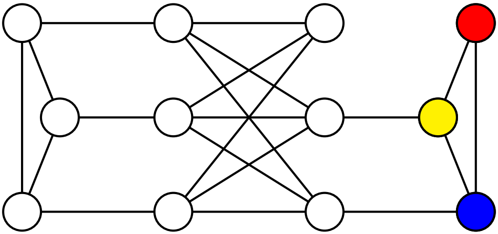
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

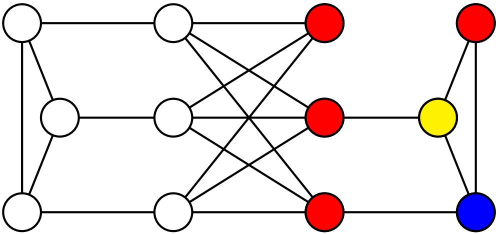
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

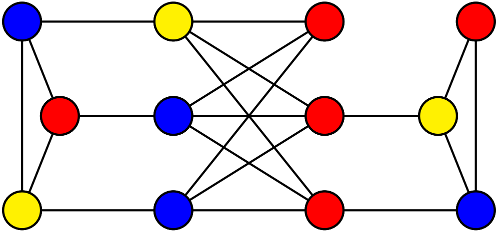
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

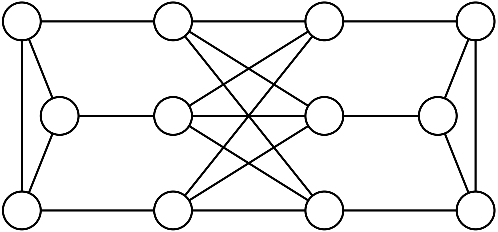
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

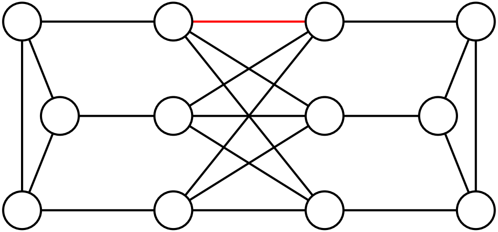
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

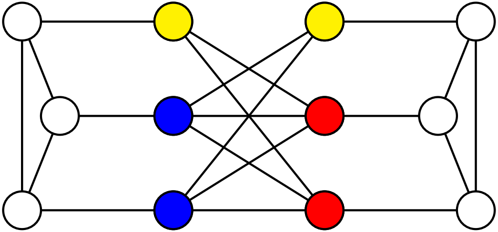
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

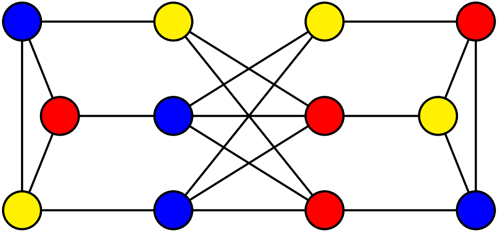
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

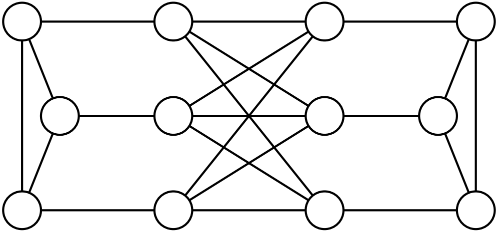
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Graphe critique

Graphe k-critique

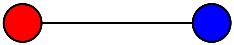
Un graphe G est dit k critique si $\chi(G) = k$ mais pour tout sommet v et toute arête e, $\chi(G - v) = k - 1$ et $\chi(G - e) = k - 1$.



Coloration orienté

Nombre chromatique

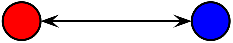
Le nombre chromatique $\chi(G)$ d'un graphe G est le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorer les sommets de G de sorte qu'aucune classe de couleur ne contienne une arête.



Coloration orienté

Nombre chromatique orienté

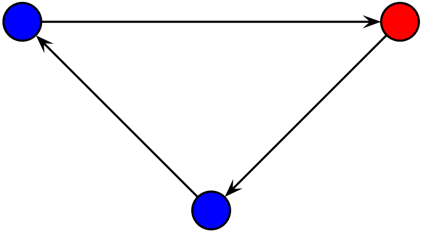
Le nombre chromatique orienté $\vec{\chi}(D)$ d'un graphe orienté D est le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorer les sommets de D de sorte qu'aucune classe de couleur ne contienne une marche fermée.



Coloration orienté

Nombre chromatique orienté

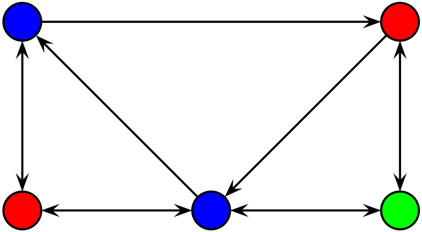
Le nombre chromatique orienté $\overrightarrow{\chi}(D)$ d'un graphe orienté D est le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorer les sommets de D de sorte qu'aucune classe de couleur ne contienne une marche fermée.



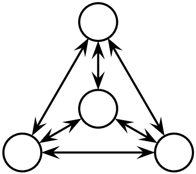
Coloration orienté

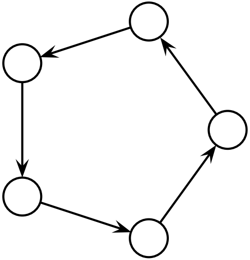
Nombre chromatique orienté

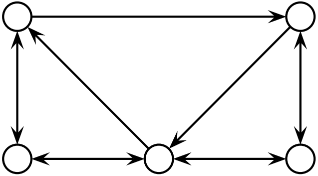
Le nombre chromatique orienté $\overrightarrow{\chi}(D)$ d'un graphe orienté D est le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorer les sommets de D de sorte qu'aucune classe de couleur ne contienne une marche fermée.



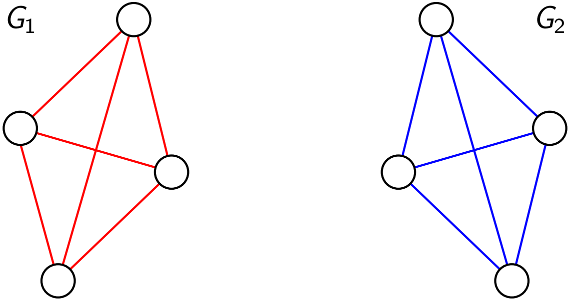
Exemples de graphes orientés critiques



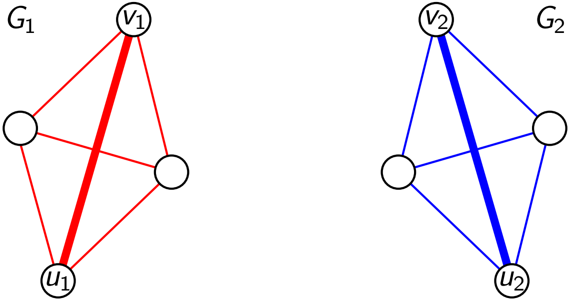




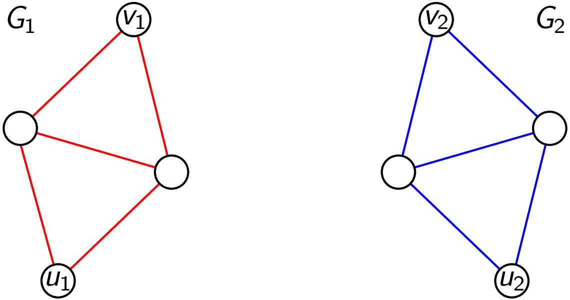
Jonction de Hajós



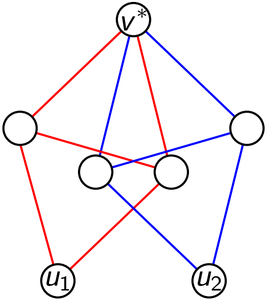
Jonction de Hajós



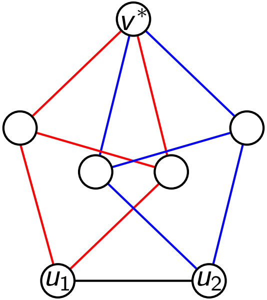
Jonction de Hajós



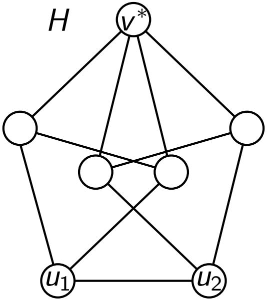
Jonction de Hajós



Jonction de Hajós



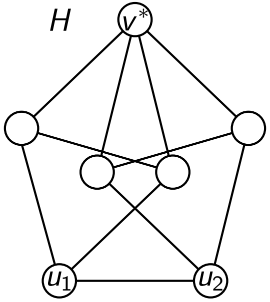
Jonction de Hajós



Théorème

Soit $k \geqslant 3$.
H est k-critique si et seulement si G_1 et G_2 sont k-critiques.

Jonction de Hajós



Théorème

Soit $k \geqslant 3$.
H est k-critique si et seulement si G_1 et G_2 sont k-critiques.

Corollaire : il existe une infinité de graphes k-critiques pour tout $k \geqslant 3$.

Graphes constructibles

Définition

L'ensemble H_k des graphes Hajós-k-constructibles contient :

- la clique bidirigée $\overleftrightarrow{K_k}$;
- les graphes obtenus par jonction de Hajós à partir de deux graphes k-constructibles ;
- les graphes obtenus à partir d'un graphe k-constructible en identifiant des sommets non-adjacents.

Théorèmes

Hajós (1961)

Tous les graphes k-critiques sont k-constructibles.

Théorèmes

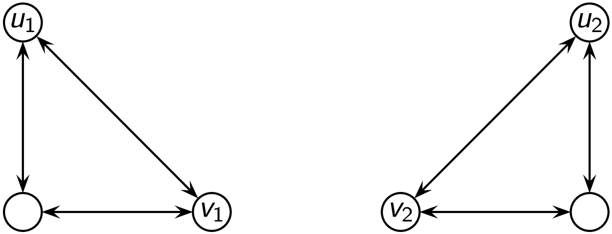
Hajós (1961)

Tous les graphes k-critiques sont k-constructibles.

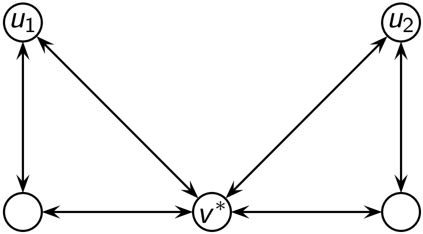
Ore (1967)

Tous les graphes de nombre chromatique k ou plus sont k-constructibles.

Jonction bidirigée

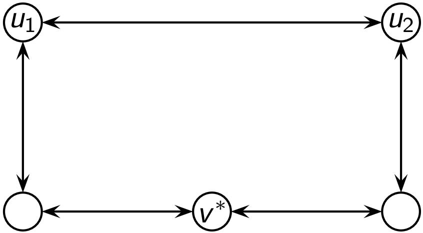


Jonction bidirigée



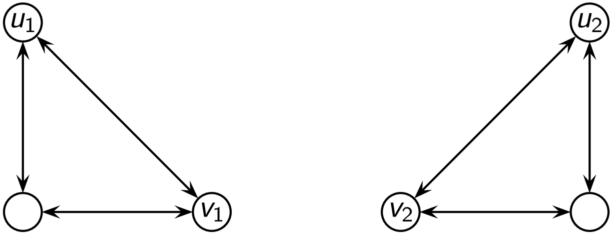
- Identification de v_1 et v_2 en v^*.

Jonction bidirigée

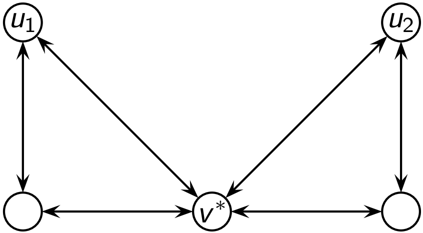


- Identification de v_1 et v_2 en v^*.
- Suppression des arcs u_1v^*, v^*u_1, u_2v^* et v^*u_2.
- Ajout des arcs u_1u_2 et u_2u_1.

Jonction orientée

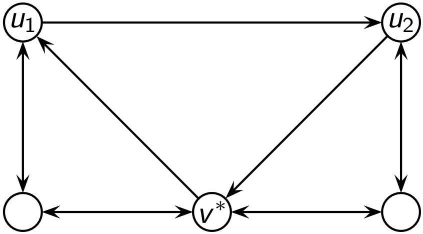


Jonction orientée



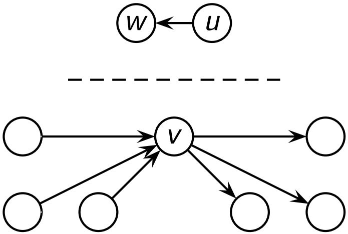
- Identification de v_1 et v_2 en v^*.

Jonction orientée

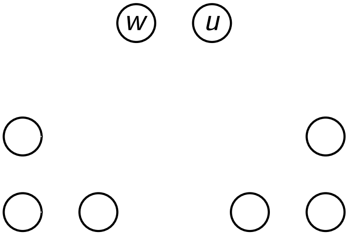


- Identification de v_1 et v_2 en v^*.
- Suppression des arcs $u_1 v^*$ et $v^* u_2$.
- Ajout de l'arc $u_1 u_2$.

Et bien d'autres

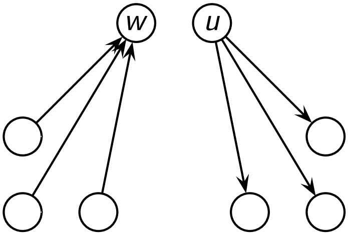


Et bien d'autres



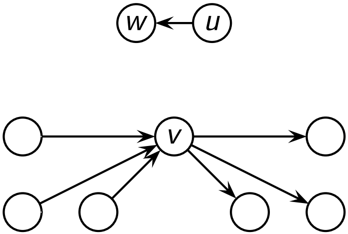
- Suppression de $uw \in A(G_1)$
- Suppression de $v \in V(G_2)$

Et bien d'autres



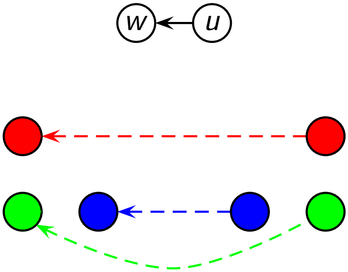
- Suppression de $uw \in A(G_1)$
- Suppression de $v \in V(G_2)$
- Ajout d'un xw pour tout $x \in N^-(v)$.
- Ajout d'un arc ux pour tout $x \in N^+(v)$.

Et bien d'autres



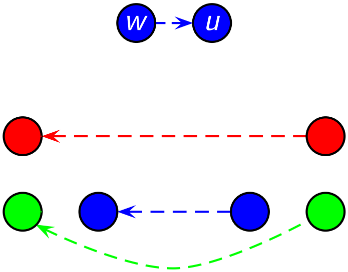
- Suppression de $uw \in A(G_1)$
- Suppression de $v \in V(G_2)$
- Ajout d'un xw pour tout $x \in N^-(v)$.
- Ajout d'un arc ux pour tout $x \in N^+(v)$.

Et bien d'autres



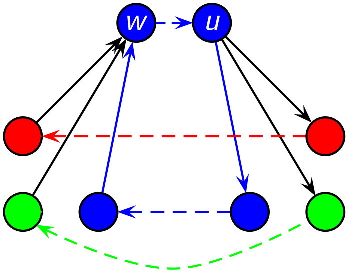
- Suppression de $uw \in A(G_1)$
- Suppression de $v \in V(G_2)$
- Ajout d'un xw pour tout $x \in N^-(v)$.
- Ajout d'un arc ux pour tout $x \in N^+(v)$.

Et bien d'autres



- Suppression de $uw \in A(G_1)$
- Suppression de $v \in V(G_2)$
- Ajout d'un xw pour tout $x \in N^-(v)$.
- Ajout d'un arc ux pour tout $x \in N^+(v)$.

Et bien d'autres



- Suppression de $uw \in A(G_1)$
- Suppression de $v \in V(G_2)$
- Ajout d'un xw pour tout $x \in N^-(v)$.
- Ajout d'un arc ux pour tout $x \in N^+(v)$.

Résultats principaux

Théorème

Tous les graphes k-critiques sont constructibles à partir de $\overleftrightarrow{K_k}$ en utilisant la jonction orientée et l'identification de sommets non-adjacents.

Résultats principaux

Théorème

Tous les graphes k-critiques sont constructibles à partir de $\overleftrightarrow{K_k}$ en utilisant la jonction orientée et l'identification de sommets non-adjacents.

Théorème

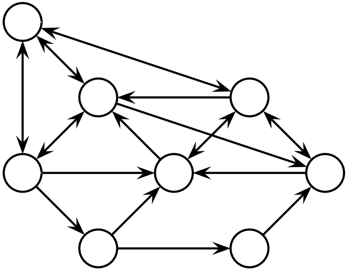
Tous les graphes de nombre chromatique k ou plus sont constructibles à partir de $\overleftrightarrow{K_k}$ en utilisant la jonction bidirigée, la jonction orientée et l'identification de sommets non-adjacents.

Idée de la preuve

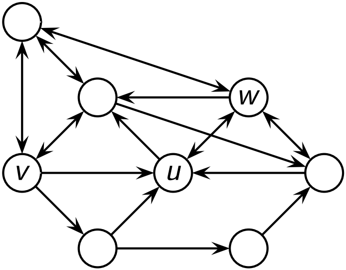
Lemme

Tout graphe de nombre chromatique au moins k contient un sous-graphe Hajós-k-constructible.

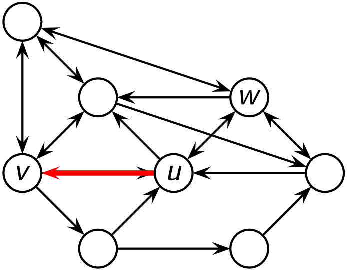
Idée de la preuve



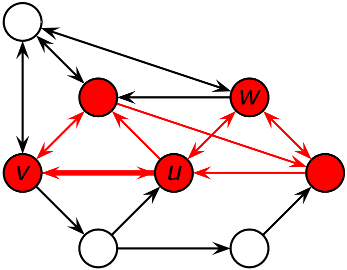
Idée de la preuve



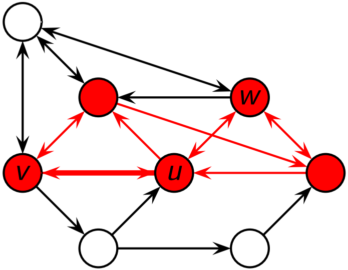
Idée de la preuve

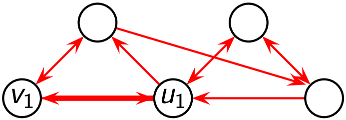


Idée de la preuve

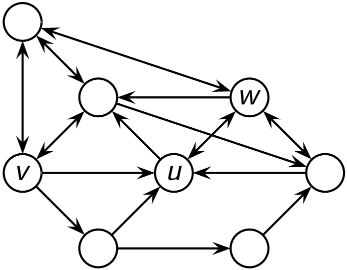


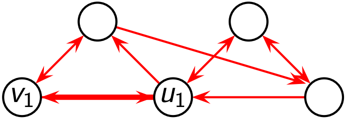
Idée de la preuve



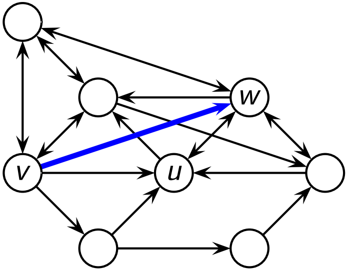


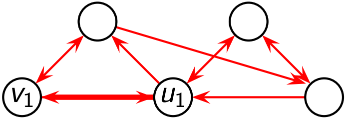
Idée de la preuve



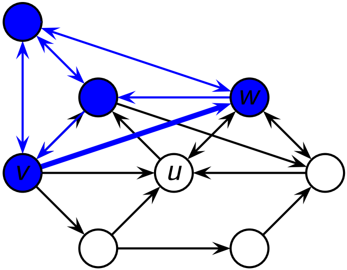


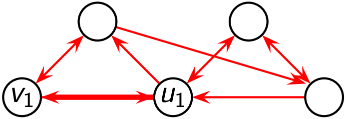
Idée de la preuve



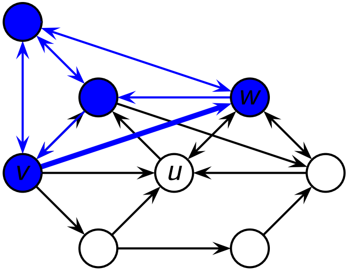


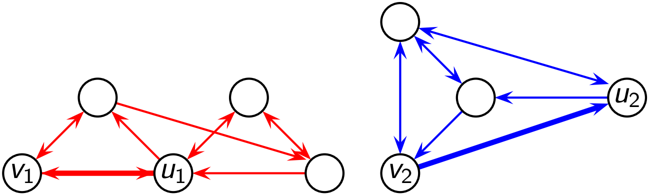
Idée de la preuve



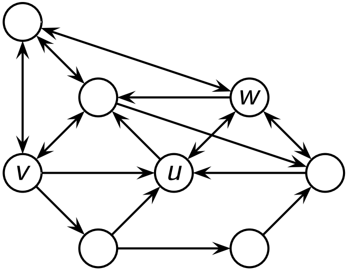


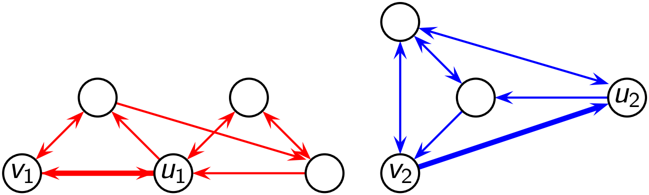
Idée de la preuve



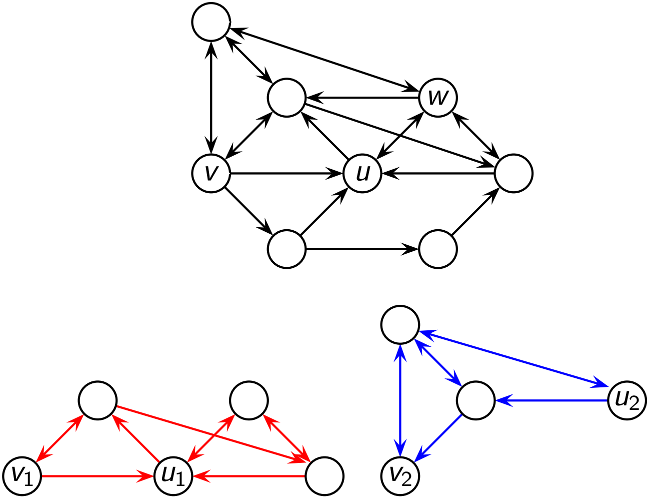


Idée de la preuve

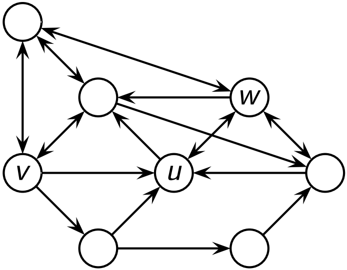


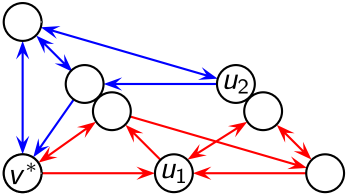


Idée de la preuve

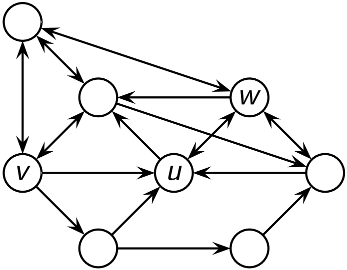


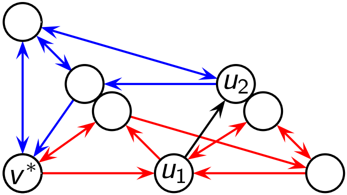
Idée de la preuve



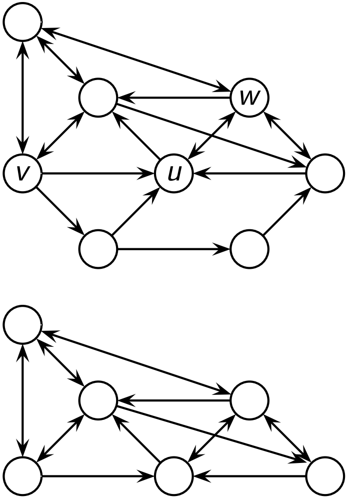


Idée de la preuve





Idée de la preuve



Définition

Low vertex

Tous les sommets d'un graphe orienté k-critique D ont degré entrant et sortant au moins $k-1$.
Un sommet v est un low vertex ssi $d^+(v) = d^-(v) = k-1$.
Le sous-graphe de D induit par les *low vertices* est appelé le low vertex subgraph de D.

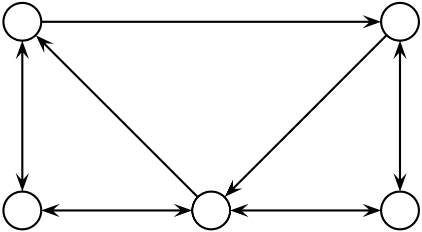
Résultats

Théorème

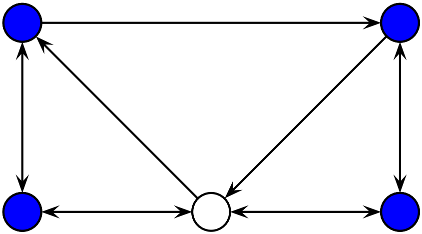
Les composantes 2-connexes du *low vertex subgraph* d'un graphe orienté D peuvent être :

- un arc
- un cycle orienté
- un cycle impair bidirigé
- une clique bidirigée

Exemple



Exemple



Exemple

Exemple

Problèmes ouverts

- Quel est le plus petit graphe k-chromatique sans arcs opposés ? Ouvert à partir de $k = 5$.
- Preuve constructive de la Hajós-constructibilité des graphes critiques. Combien d'opérations sont nécessaires ? Est-ce polynomial en la taille du graphe ?

Merci !