Complexité paramétrée dans les graphes à transitions interdites

Thomas Bellitto Shaohua Li Karolina Okrasa
Marcin Pilipczuk Manuel Sorge

Mardi 17 novembre 2020

Université de Varsovie

Contexte

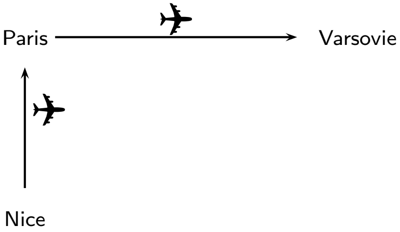
Marches possibles dans un graphe $\neq$ marches possibles dans le réseau qu'on modélise.

Contexte

Marches possibles dans un graphe $\neq$ marches possibles dans le réseau qu'on modélise.

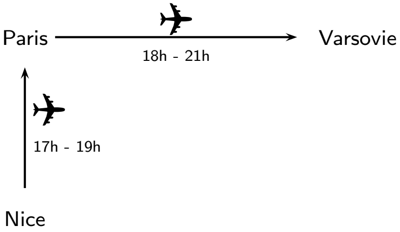
Contexte

Marches possibles dans un graphe $\neq$ marches possibles dans le réseau qu'on modélise.



Contexte

Marches possibles dans un graphe $\neq$ marches possibles dans le réseau qu'on modélise.



Définition

Transition : paire d'arêtes adjacentes.

Nouveau modèle : graphe à transitions interdites $G = (V, E, T)$. On dit qu'une marche est compatible avec T si elle n'utilise que des transitions dans T.

Objectif : développer des outils pour étudier les graphes à transitions interdites et résoudre des problèmes algorithmiques importants dessus.

Exemples : cycles eulériens, hamiltoniens, voyageur de commerce, linkage, plus court chemin, chemins élémentaires, connexité, robustesse...

Difficulté

Problème : tout est beaucoup dur dans les graphes à transitions interdites.

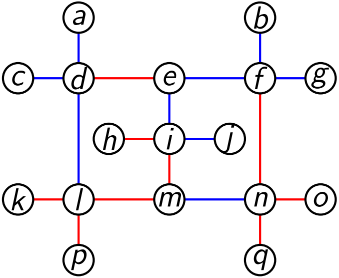
Théorème (Szeider, 2003)

Étant donné un graphe à transitions interdites $G = (V, E, T)$ et deux sommets u et v de V, il est NP-complet de déterminer s'il existe un chemin élémentaire entre u et v compatible avec T.

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

- k-arête-coloration : fonction $c : E \mapsto [1, k]$.
- Coloration propre : $c(uv) \neq c(vw)$.
- Marche proprement colorée : n'utilise pas deux arêtes de la même couleur à la suite.



Contexte

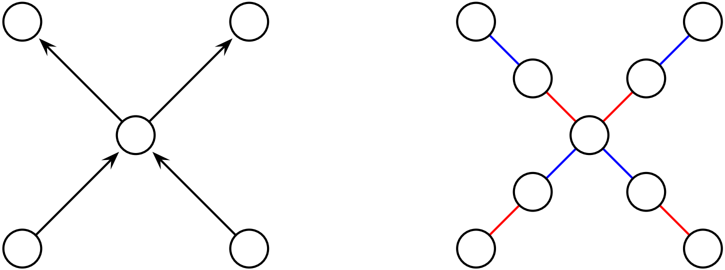
- Introduit par Chen et Daykin en 1976.

Contexte

- Introduit par Chen et Daykin en 1976.
- Applications en bio-informatique et en chimie.

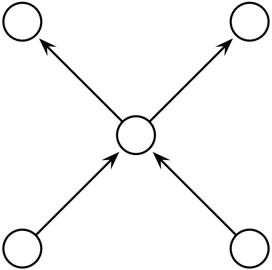
Contexte

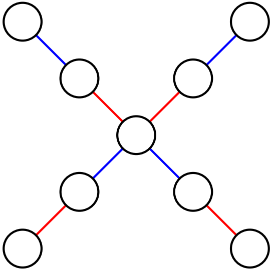
- Introduit par Chen et Daykin en 1976.
- Applications en bio-informatique et en chimie.
- Modèle puissant.



Contexte

- Introduit par Chen et Daykin en 1976.
- Applications en bio-informatique et en chimie.
- Modèle puissant.





- Cas particulier de graphe à transitions interdites.

Contexte

Soit un graphe G.
Quel est le nombre chromatique de G ?
La taille d'une plus grande clique ?
d'un plus petit ensemble dominant ?
d'un plus petit *vertex cover* ?

Contexte

Soit un graphe G.
Quel est le nombre chromatique de G ?
La taille d'une plus grande clique ?
d'un plus petit ensemble dominant ?
d'un plus petit *vertex cover* ?

NP-complet

Contexte

Version paramétrée : on fixe k (10 ou 15 par exemple)

Soit un graphe G.
Quel est le nombre chromatique de G ?
La taille d'une plus grande clique ?
d'un plus petit ensemble dominant ?
d'un plus petit *vertex cover* ?

Contexte

Version paramétrée : on fixe k (10 ou 15 par exemple)

Soit un graphe G.
G est-il k-colorable ?
A-t-il une clique de taille k ?
Un ensemble dominant de taille k ?
Un vertex cover de taille k ?

Contexte

Version paramétrée : on fixe k (10 ou 15 par exemple)

Soit un graphe G.
G est-il k-colorable ? NP-complet
A-t-il une clique de taille k ?
Un ensemble dominant de taille k ?
Un vertex cover de taille k ?

Contexte

Version paramétrée : on fixe k (10 ou 15 par exemple)

Soit un graphe G.
G est-il k-colorable ? NP-complet
A-t-il une clique de taille k ? Polynomial
Un ensemble dominant de taille k ? Polynomial
Un vertex cover de taille k ? Polynomial

Plusieurs façons d'être polynomial

Vertex cover de taille k :

- Si G n'a pas d'arête, OUI
- Si $k = 0$, NON
- On choisit une arête uv arbitrairement.
  - Si $G \setminus u$ a un vertex cover de taille $k - 1$, OUI.
  - Si $G \setminus v$ a un vertex cover de taille $k - 1$, OUI.
  - NON

Plusieurs façons d'être polynomial

Vertex cover de taille k :

- Si G n'a pas d'arête, OUI
- Si $k = 0$, NON
- On choisit une arête uv arbitrairement.
  - Si $G \setminus u$ a un vertex cover de taille $k - 1$, OUI.
  - Si $G \setminus v$ a un vertex cover de taille $k - 1$, OUI.
  - NON

Complexité : $O(2^k \times n^2)$.

Plusieurs façons d'être polynomial

Vertex cover de taille k :

- Si G n'a pas d'arête, OUI
- Si $k = 0$, NON
- On choisit une arête uv arbitrairement.
  - Si $G \setminus u$ a un vertex cover de taille $k - 1$, OUI.
  - Si $G \setminus v$ a un vertex cover de taille $k - 1$, OUI.
  - NON

Complexité : $O(2^k \times n^2)$.
Algo bruteforce pour la clique : $O(n^k \times k^2)$.

Plusieurs façons d'être polynomial

Vertex cover de taille k :

- Si G n'a pas d'arête, OUI
- Si $k = 0$, NON
- On choisit une arête uv arbitrairement.
  - Si $G \setminus u$ a un vertex cover de taille $k-1$, OUI.
  - Si $G \setminus v$ a un vertex cover de taille $k-1$, OUI.
  - NON

Complexité : $O(2^k \times n^2)$.
Algo bruteforce pour la clique : $O(n^k \times k^2)$.
Un problème est FPT en k si on peut le résoudre en $O(f(k) \times \mathrm{poly}(n))$.

Réduction paramétrée

Réduction polynomiale de 4-SAT à 3-SAT :
$F \wedge (a \vee b \vee c \vee d)$ satisfiable ssi
$F \wedge (a \vee b \vee e) \wedge (c \vee d \vee \neg e)$ satisfiable.

Réduction paramétrée

Réduction polynomiale de 4-SAT à 3-SAT :
$F \wedge (a \vee b \vee c \vee d)$ satisfiable ssi
$F \wedge (a \vee b \vee e) \wedge (c \vee d \vee \neg e)$ satisfiable.

Version paramétrée : une formule F est-elle satisfiable en mettant au plus k variables à VRAI.

Notre réduction ne marche plus !

On ne peut pas non plus réduire SAT à CNF-SAT.

Hiérarchie W

Weft d'un arbre : plus grand nombre de nœuds avec au moins 3 descendants entre une feuille et la racine.

$W[i]$: complexité du problème ≪Une formule logique de weft i est-elle satisfiable en mettant au plus k variable à VRAI ?≫

$W[0] \subset W[1] \subset W[2] \subset W[3] \subset \ldots$

Exemples importants

- $W[0] = \text{FPT}$:
  - vertex cover de taille k.
  - 3-SAT avec au plus k variables à VRAI.
- $W[1]$-complet :
  - Clique de taille k.
  - 3-SAT avec exactement k variables à VRAI.
- $W[2]$-complet :
  - Ensemble dominant de taille k.
  - CNF-SAT avec au plus k variables à VRAI.
  - CNF-SAT avec exactement k variables à VRAI.

Choix du paramètre

- Paramètre lié à la solution.
- N'importe quel autre invariant de graphe.

Théorème (Courcelle, 1990)

Toute propriété exprimable en logique monadique du second ordre est décidable en temps linéaire dans une classe de graphes de treewidth bornée.

Qu'est-ce qui rend un problème difficile ? Sur quelles classes de graphes peut-on le résoudre facilement ?

1. Graphes à transitions interdites
2. Complexité paramétrée
3. Nos résultats

Chemin élémentaire

Soit $G = (V, E, T)$, $u, v \in V$. Existe-t-il un chemin élémentaire entre u et v ?

- NP-complet. (Szeider, 2003)

Chemin élémentaire

Soit $G = (V, E, T)$, $u, v \in V$. Existe-t-il un chemin élémentaire entre u et v ?

- NP-complet. (Szeider, 2003)
- FPT en la longueur du chemin.
  Existe-t-il un chemin de longueur au plus k ?

Chemin élémentaire

Soit $G = (V, E, T)$, $u, v \in V$. Existe-t-il un chemin élémentaire entre u et v ?

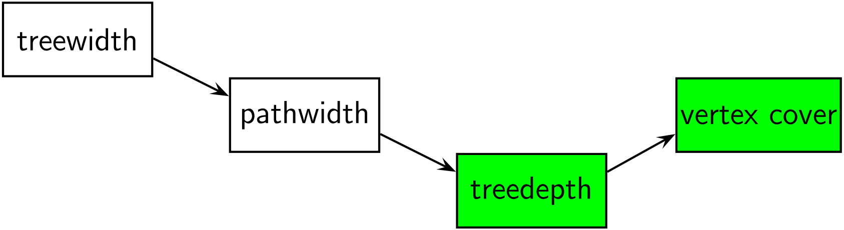
- NP-complet. (Szeider, 2003)
- FPT en la longueur du chemin.
  Existe-t-il un chemin de longueur au plus k ?
- FPT en la longueur du détour.
  Soit d la distance entre u et v dans le graphe classique sous-jacent. Existe-t-il un chemin de longueur au plus $d + k$?

Autres paramètres

- FPT en la taille d'un plus petit vertex cover.
- FPT en la treedepth.
  Profondeur minimum d'une forêt couvrante F telle que tous les sommets adjacents dans G soit ancêtre/descendant dans F.

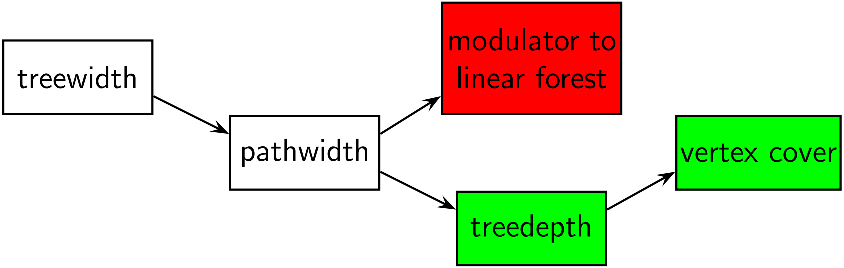
Autres paramètres

- FPT en la taille d'un plus petit vertex cover.
- FPT en la treedepth.



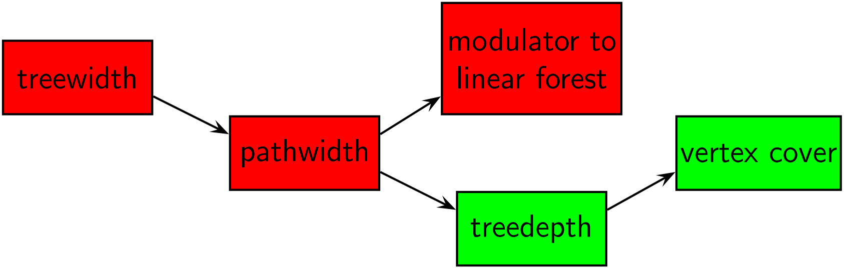
Autres paramètres

- FPT en la taille d'un plus petit vertex cover.
- FPT en la treedepth.



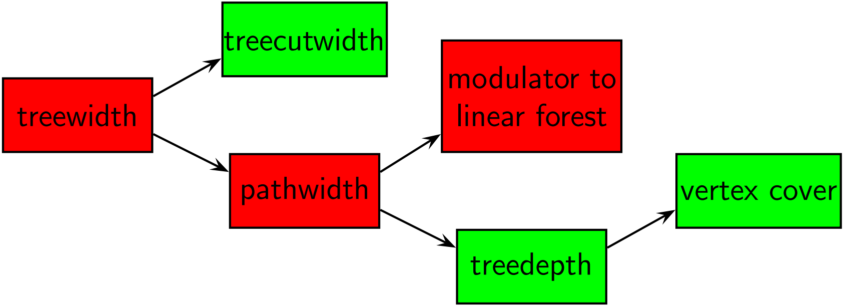
Autres paramètres

- FPT en la taille d'un plus petit vertex cover.
- FPT en la treedepth.



Autres paramètres

- FPT en la taille d'un plus petit vertex cover.
- FPT en la treedepth.



Autres paramètres

- FPT en la taille d'un plus petit vertex cover.
- FPT en la treedepth.
- W[1]-hard en la taille d'un modulateur vers une forêt linéaire.
- W[1]-hard en la pathwidth.
- W[1]-hard en la treewidth.
- FPT en la treecutwidth :
  $k^{\mathcal{O}(k^2)} \cdot n^2 + \mathcal{O}(n^3) + \mathcal{O}\left((4^k \cdot k!)^{\mathcal{O}(3k+1)}\right) \cdot n^2$.
  Analogue de la treewidth pour les arêtes (met en évidence les petites coupes dans le graphe).

Cycles hamiltoniens

Cycle et chemin hamiltoniens compatibles dans un graphe à transitions interdites :

- W[1]-hard en la taille d'un modulateur vers un graphe de treewidth 2.

Cycles hamiltoniens

Cycle et chemin hamiltoniens compatibles dans un graphe à transitions interdites :

- W[1]-hard en la taille d'un modulateur vers un graphe de treewidth 2.
- W[1]-hard en la pathwidth.
- W[1]-hard en la treewidth.

Cycles hamiltoniens

Cycle et chemin hamiltoniens compatibles dans un graphe à transitions interdites :

- W[1]-hard en la taille d'un modulateur vers un graphe de treewidth 2.
- W[1]-hard en la pathwidth.
- W[1]-hard en la treewidth.

Cycle hamiltonien proprement coloré :

- FPT en la treewidth.
  $2^{\mathcal{O}(k)} \cdot (|V(G)| + |V(\mathcal{T})| + \ell)$
  où k est la treewidth, $\mathcal{T}$ est l'arbre de la décomposition et ℓ le nombre de couleurs des arêtes.

Chemins disjoints

Entrée : un graphe orienté G, des paires de sommets $(s_1, t_1), \dots, (s_r, t_r)$.
Sortie : des chemins $P_1, \dots, P_r$ disjoints tels que P_i soit un chemin élémentaire de s_i à t_i.

- Graphe orienté classique : NP-complet pour $r \geqslant 2$ (Fortune, Hopcroft, Wyllie, 1980).
- Graphe arête-coloré (orienté ou non) : NP-complet pour $r \geqslant 2$.
- Graphe à transitions interdites (orienté ou non) : NP-complet pour $r \geqslant 1$ (Szeider, 2003).

Plus courts chemins disjoints

On impose que les P_i soient des plus cours chemins :

- Graphes orientés classiques : polynomial pour $r = 2$, ouvert à partir de $r \geqslant 3$ (Kobayashi, 2017).

Plus courts chemins disjoints

On impose que les P_i soient des plus cours chemins :

- Graphes orientés classiques : polynomial pour $r = 2$, ouvert à partir de $r \geqslant 3$ (Kobayashi, 2017).
- Graphes orientés à transitions interdites : toujours polynomial pour $r = 2$ (cas sommet-disjoint et cas arc-disjoint)

Merci !